

LILIANA MARIA TODERIUC
GABRIEL VRÎNCEANU
GABRIELA POSTESCU
GABRIELA DIANA NICULESCU

VASILICA DILIMOȚ NIȚĂ
GABRIELA VLAD
AURELIA VIDOVICI
ILEANA ȘERBAN

CAIET DE VACANȚĂ

Matematică

CLASA A VII-A

TEMA 1

Numere raționale: număr opus, modul, compararea numerelor raționale

În această temă ne vom aminti despre:

- ✓ mulțimea numerelor raționale;
- ✓ opusul unui număr rațional;
- ✓ modulul unui număr rațional;
- ✓ compararea numerelor raționale.



✓ **Mulțimea numerelor raționale:** $\mathbb{Q} = \{x/\text{există } a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, \text{ astfel încât } x = \frac{a}{b}\}; \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$

✓ **Opusul numărului rațional** x este numărul rațional notat $-x$ care are ca reprezentare pe axa numerelor simetricul față de origine al punctului care-l reprezintă pe x .

✓ **Modulul unui număr rațional** x (sau **valoarea absolută** a numărului x) reprezintă distanța de la punctul corespunzător pe axă $P(x)$ până la originea axei, adică OP .

Pentru orice $x \in \mathbb{Q}$, **modulul lui x** se definește astfel: $|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

Proprietățile modulului unui număr rațional:

1. $|x| \geq 0$;
2. $|x| = 0$ dacă și numai dacă $x = 0$;
3. $|x| = |-x|$;
4. $|x| \geq x$;
5. $|xy| = |x| |y|$;
6. $|x| - |y| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$ pentru orice $x, y \in \mathbb{Q}$.

✓ **Compararea numerelor raționale:**

I. Fie $r_1 = \frac{a}{b}, r_2 = \frac{c}{d}, a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ și $b, d \neq 0$. Atunci:

- $\frac{a}{b} > 0$ dacă a și b au același semn,
- $\frac{a}{b} < 0$ dacă a și b au semne contrare,
- $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ dacă:
 1. $\frac{a}{b} > 0, \frac{c}{d} > 0$ și $|ad| < |bc|$;
 2. $\frac{a}{b} < 0$ și $\frac{c}{d} > 0$;
 3. $\frac{a}{b} < 0, \frac{c}{d} < 0$ și $\left| \frac{a}{b} \right| > \left| \frac{c}{d} \right|$.

II. Fie $r_1 = \overline{a_0 a_1 a_2 a_3 \dots}$ și $r_2 = \overline{b_0 b_1 b_2 b_3 \dots}$, unde $a_0, b_0 \in \mathbb{Z}$ și $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ cifre. Atunci $r_1 < r_2$ dacă:

- a) $a_0 < 0$ și $b_0 > 0$;
- b) $a_0 > 0, b_0 > 0$, iar $a_i = b_i$ oricare ar fi $1 \leq i \leq k-1, a_k < b_k$;
- c) $a_0 < 0, b_0 < 0$ și $|r_1| > |r_2|$.

✓ **Partea întreagă a unui număr rațional** x este cel mai mare număr întreg, mai mic sau egal cu numărul dat. Se notează cu $[x]$.

✓ **Partea fracționară** a unui număr rațional este diferența dintre număr și partea sa întreagă. Se notează cu $\{x\}$.

Subiectul I

1. a) Transformați în fracții zecimale următoarele numere: $\frac{17}{20}$; $\frac{19}{17}$; $\frac{23}{6}$;



b) Transformați în fracții ordinare ireductibile: 2,42; $-5,(27)$; $3,56(2)$.

2. Stabiliți care dintre următoarele afirmații sunt adevărate:

a) $\frac{8}{5} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$; b) $-\frac{5}{18} \notin \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$; c) $\frac{9}{7} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$; d) $-\frac{5}{8} \notin \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$; e) $-7 \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$; f) $-\frac{34}{17} \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

3. Fie mulțimea: $A = \left\{2; -7; -\frac{3}{11}; 18; \frac{52}{3}; -\frac{91}{13}; \frac{44}{9}; 0\right\}$. Determinați mulțimile:

a) $A \cap \mathbb{Z}$; b) $A \cap \mathbb{N}$; c) $A \cap \mathbb{Q}$; d) $A \cup \mathbb{Q}$; e) $A \setminus \mathbb{N}$; f) $A \setminus \mathbb{Z}$; g) $A \setminus \mathbb{Q}$.

4. Pentru fiecare dintre numerele următoare aflați modulul și opusul său:

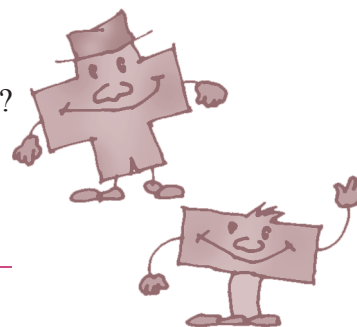
$\frac{2}{3}$; $-\frac{15}{11}$; 4,75; -3,8; 0; -7; $\frac{5}{9}$.

5. Scrieți cel puțin două numere raționale mai mari decât -1, dar mai mici decât $-\frac{2\,012}{2\,013}$.

Subiectul al II-lea

1. Câte numere pozitive conține mulțimea $A = \left\{x \in \mathbb{N} / \frac{53}{23-3x} \in \mathbb{Q}\right\}$?

Dar mulțimea $P = \left\{x \in \mathbb{Z} / \frac{53}{23-3x} \in \mathbb{N}\right\}$?



2. Explicați de ce:

a) $\frac{-53+17}{-53+901:17} \notin \mathbb{Q}$; b) $7,1231234123451... \notin \mathbb{Q}$; c) $7,1771771... \in \mathbb{Q}$.

3. Scrieți cinci elemente ale mulțimii $A = \left\{x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} / \frac{18x-3}{7} \in \mathbb{N}\right\}$.

4. Fie suma $S = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \dots + \frac{1}{2400}$.

a) Câți termeni are suma S ?

b) Arătați că $\frac{1}{2k(2k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+2} \right)$.

c) Arătați că $0,23 < S < 0,25$.

5. a) Determinați $x \in \mathbb{N}$ pentru care numărul $\frac{12}{6x-5} \in \mathbb{Z}$.

b) Determinați mulțimea $A = \left\{x \in \mathbb{Z} / \frac{18}{2x-3} \in \mathbb{Z}\right\}$.

6. Determinați $a \in \mathbb{Z}$ în fiecare dintre cazurile:

a) $a \leq -2,75 \leq a + 1$; **b)** $a \leq 2,75 \leq a + 1$; **c)** $a \leq \frac{57}{7} \leq a + 1$; **d)** $-a \leq -23,23 \leq -a + 1$.

7. Determinați mulțimile: $A = \left\{x \in \mathbb{Z} / |x| = \frac{2}{9}\right\}$ și $B = \left\{x \in \mathbb{Z} / x \leq \frac{2}{9}\right\}$.

8. Determinați cardinalul mulțimilor: $A = \left\{x \in \mathbb{Z} / -\frac{7}{3} \leq x \leq \frac{8}{5}\right\}$ și $B = \{x \in \mathbb{Z} / 10 \leq |10x| \leq 50\}$.

9. Ordonăți descrescător numerele raționale $\frac{-3}{x}, \frac{-3}{|x|}, \frac{3}{|x|}, \frac{3}{x}, \left|\frac{3}{x}\right|, \left|\frac{-3}{x}\right|, 0$, unde $x \in \mathbb{Z}^*$.

Subiectul al III-lea

1. **a)** Fie $a, b \in \mathbb{Z}$, $a < b$, $b \neq 0$. Demonstrați că dacă fracția $\frac{a}{b}$ este ireductibilă, atunci și fracția $\frac{b-a}{b}$ este ireductibilă;

b) Demonstrați că, în mulțimea $A = \left\{\frac{1}{2\,013}; \frac{2}{2\,013}; \frac{3}{2\,013}; \dots; \frac{2\,012}{2\,013}\right\}$ numărul fracțiilor ireductibile este par.



2. Demonstrați că fracția $\frac{n}{2^{n+1}5^n + 1}$ este reductibilă, unde $n = \overline{123456789101112\dots5354}$.



Să ne jucăm!

Probleme distractive și nu numai...

1. Fie $A = \left\{ \frac{501}{2}, \frac{502}{3}, \frac{503}{4}, \dots \right\}$. Aflați cardinalul mulțimii $A \cap \mathbb{N}$.

2. Demonstrați că $\frac{x+n}{n-1} \geq \frac{n+3}{2x+n+1}, \forall x \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}$.

3. Determinați numerele naturale m, n și p nenule și distincte, știind că:

$$\frac{4}{1+m} + \frac{9}{m+n} + \frac{30}{m-n+p} \leq 10.$$

(OM București, 2011)

4. Fie $n = \overline{0,abc(d)} + \overline{0,bad(c)} + \overline{0,cda(b)} + \overline{0,dcb(a)}$, unde a, b, c și d sunt cifre în baza 10. Dacă n nu este fracție periodică, atunci n este număr natural.

(OM Harghita, 2011)

5. La ora de matematică, profesorul propune spre rezolvare următoarea problemă: „Stabiliți câte fracții care au numitorul cel mult egal cu 200 se află între $\frac{1}{101}$ și $\frac{1}{100}$.”
Ionel răspunde că nu există nicio fracție, iar Gigel spune că există două. Care dintre ei a dat răspunsul corect?

6. La un magazin s-au adus n kilograme de citrice din care s-au vândut $\frac{7}{25}$ lămâi și 0,45 portocale. Știind că prețul de vânzare este același, stabiliți care sumă încasată a fost mai mare, cea din vânzarea lămâilor sau cea din a portocalelor.

Tema 2

Operații cu numere raționale

În această temă ne vom aminti despre:

- ✓ regula semnului la adunarea numerelor raționale;
- ✓ regula semnului la înmulțirea numerelor raționale;
- ✓ ridicarea la putere a numerelor raționale.



Pentru a **aduna** două numere raționale scrise ca fracții ordinare procedăm astfel:

- dacă fracțiile au același numitor, adunăm numărătorii între ei și păstrăm numitorul comun
- dacă fracțiile au numitori diferiți, mai întâi aducem fracțiile la același numitor, apoi folosim regula anterioară.

✓ **Regula semnului la adunarea** a două numere raționale:

- dacă cele două numere au același semn, atunci și suma lor are același semn;
- dacă cele două numere au semne opuse, atunci semnul sumei este dat de numărul cu valoare absolută (modul) mai mare; valoarea absolută a sumei se obține scăzând din valoarea absolută mai mare valoarea absolută mai mică.

Pentru a **scădea** două numere raționale adunăm primul număr cu opusul celui de-al doilea.

Pentru a **înmulți** două numere raționale scrise ca fracții ordinare înmulțim numărătorii între ei și numitorii între ei.

Observație: Înainte de a efectua înmulțirea, căutăm să simplificăm fracțiile.

✓ **Regula semnului la înmulțirea** a două numere raționale:

- dacă cele două numere au același semn, atunci produsul va fi pozitiv;
- dacă cele două numere au semne diferite, atunci produsul va fi negativ.

Pentru a **împărți** două numere raționale scrise ca fracții ordinare, înmulțim primul număr cu inversul celui de-al doilea.

✓ **Ridicarea la putere** a unui număr rațional: dacă $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ și $n \in \mathbb{N}^*$ atunci $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}}_n$,
iar $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$.

Subiectul I

1. Calculați:

a) $\left(+\frac{7}{4}\right) + \left(+\frac{3}{4}\right)$; b) $\left(+\frac{2}{5}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right)$; c) $\left(-\frac{3}{11}\right) + \left(-\frac{7}{11}\right)$; d) $\frac{2}{3} + \left(-\frac{5}{3}\right)$; e) $-\frac{6}{7} + \frac{3}{7} + 1$;

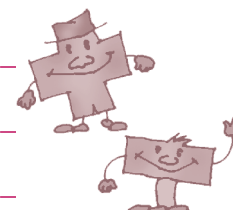
f) $-3 + \left(-\frac{2}{3}\right)$; g) $-5\frac{1}{2} + (-3,5)$; h) $-6,25 + \frac{11}{4} + 3\frac{2}{4}$; i) $-7,(2) + 18,(5)$; j) $-3,2(1) + 5,4(3)$.

2. Calculați:

a) $\left(+\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{5}{9}\right) + \left(-\frac{7}{2}\right) + \left(+\frac{11}{6}\right)$; **b)** $\left(-\frac{13}{20}\right) + \frac{7}{5} + \left(-\frac{3}{10}\right) + (-4)$; **c)** $5\frac{3}{7} + (-4,5) + \left(-7\frac{1}{2}\right)$;

d) $\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{2}{9}\right) + \left(-\frac{5}{-27}\right) + \left(\frac{10}{-81}\right)$; **e)** $4,25 + (-1,75) + (-7,5) + 8,25$; **f)** $-7\frac{3}{8} + 2\frac{3}{4} + 5, (3)$;

g) $2\frac{1}{5} + \left(-1\frac{3}{4}\right) + 9,15 + (-3)$; **h)** $-3,2(5) + 6,4(32) + \left(-\frac{7}{9}\right)$.



3. Calculați:

a) $\frac{7}{5} - \frac{2}{5}$; **b)** $3\frac{1}{8} - 2\frac{5}{8}$; **c)** $\left(-\frac{3}{7}\right) - \left(+\frac{5}{21}\right)$; **d)** $\left(-\frac{4}{15}\right) - \left(-\frac{5}{18}\right)$; **e)** $\left|-\frac{9}{4}\right| - \left|-\frac{7}{12}\right|$;

f) $6,37 - 10,47$; **g)** $-1\frac{2}{5} - 4\frac{3}{10} - \left(-\frac{22}{15}\right)$; **h)** $\left(-\frac{5}{14}\right) - \left(+\frac{2}{21}\right) - \left(-\frac{11}{42}\right) + \frac{10}{63}$.

4. Calculați:

a) $\frac{5}{9} \cdot \frac{12}{15}$; **b)** $\frac{7}{6} \cdot \left(-\frac{15}{7}\right)$; **c)** $\left(-\frac{9}{6}\right) \cdot \left(-\frac{21}{24}\right)$; **d)** $-3\frac{1}{7} \cdot \frac{49}{11}$; **e)** $(-6) \cdot (-5, (2))$;

f) $\left(-\frac{8}{15}\right) \cdot \left(-\frac{25}{4}\right) \cdot \left(+\frac{13}{10}\right)$; **g)** $\left(-\frac{3}{20}\right) \cdot \left(-\frac{25}{-6}\right) \cdot \left(-\frac{8}{-45}\right) \cdot (-27)$; **h)** $1\frac{1}{5} \cdot \left(-4\frac{1}{6}\right) \cdot (-2,5)$.



5. Calculați:

a) $\frac{36}{5} : \frac{9}{25}$; b) $\left(-2\frac{7}{8}\right) : \left(-3\frac{8}{5}\right)$; c) $-6,25 : \frac{125}{8}$; d) $2,89 : (-0,017)$; e) $\left(-\frac{8}{5}\right) : \left(-\frac{3}{25}\right) : \frac{64}{5}$;

f) $\left(-1\frac{5}{6}\right) : 3, (5) : \left(-2\frac{9}{12}\right)$; g) $-1, (6) : 2, (30) : 0,8(3)$; h) $\frac{\frac{8}{7}}{-20} : \frac{4}{-75}$



6. Calculați:

a) $\left(-\frac{3}{5} + 2\frac{4}{25} - 3\frac{1}{15}\right) \cdot \frac{25}{113}$; b) $\left(-\frac{7}{2}\right) \cdot \left(-\frac{8}{21}\right) + \left(-\frac{18}{5}\right) : \left(+\frac{54}{5}\right)$;

c) $-\frac{21}{10} \cdot \left(-\frac{4}{5} + 1\frac{1}{7} - 1\frac{2}{35}\right)$; d) $\left(-2,25 + \frac{3}{2} - 1\frac{3}{4}\right) : \left(\frac{5}{6} - \frac{11}{18}\right)$.

7. Calculați:

a) $\left(-\frac{8}{3}\right)^2$; b) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$; c) $(-1,2)^2$; d) $\left(-\frac{432}{123}\right)^0$; e) $\left(-\frac{17}{51}\right)^3$; f) $\left(-2\frac{1}{3}\right)^{-2}$;

g) $\left(-\frac{5}{3}\right)^3 : \left(\frac{5}{3}\right)^2$; h) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{4}{9}$; i) $\left\{\left[\left(-\frac{4}{7}\right)^3\right]^0\right\}^4$.

8. Calculați:

a) $\left[\left(-\frac{2}{11} \right)^2 \right]^3 \cdot \left[\left(-\frac{2}{11} \right)^3 \right]^{-2}$; **b)** $\left[\left(-\frac{2}{5} \right)^6 \cdot \left(-\frac{2}{5} \right)^4 \right]^2 : \left[\left(-\frac{2}{5} \right)^6 \right]^3$; **c)** $\left(-\frac{2}{3} \right)^5 : \left(-\frac{2}{3} \right)^3 + \left(\frac{1}{4} \right)^3 : \left(-\frac{1}{4} \right)$;
d) $\left(-3 + \frac{4}{3} \right)^2 : \left(2\frac{1}{9} - 1, (2) \right)$; **e)** $\left[\left(\frac{3}{4} \right)^5 : \left(-\frac{3}{4} \right)^3 + 0^{2013} - (-1)^{2013} \right]^{-1}$.



Subiectul al II-lea

1. Calculați (parantezele drepte sunt folosite cu înțeles de parte întreagă):

a) $\left| -\frac{7}{4} \right| - \left| \frac{3}{8} \right| - \left| -\frac{5}{24} \right| + \left| -\frac{1}{6} \right|$; **b)** $\left| -\frac{1}{2} \right| \cdot \left| -\frac{8}{3} \right| + \left| \frac{5}{6} \right| : \left| -\frac{7}{2} \right| \cdot \left| -7 \right|$;
c) $[+5, 7(2)] \cdot \left[-\frac{1}{2} \right] + [-2, (3)]^2 + [0, 1(7)] : \left[-\frac{7}{3} \right]$; **d)** $\left[\frac{9}{5} - \frac{3}{7} \cdot \frac{14}{5} + 0, 11 \right]^5 : [-7, 2 + 1, 15 : 0, 1]$.

2. Calculați:

a) $\frac{1}{1007} + \frac{2}{1007} + \frac{3}{1007} + \dots + \frac{2013}{1007}$; **b)** $\left(\frac{3}{1} + \frac{5}{2} + \frac{7}{3} + \frac{9}{4} + \dots + \frac{199}{99} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} \right)$;
c) $\left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \right) \left(1 - \frac{1}{4} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{2013} \right)$; **d)** $(-1)^n \cdot \frac{2}{3} - (-1)^{n+2} \cdot \frac{7}{3} + (-1)^{n+3} \cdot \frac{4}{3}, n \in \mathbb{N}$;
e) $1 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3} + 9 \cdot 10^{-4}$.

3. Calculați:

$$\text{a) } \left[\frac{8}{7} : \left(\frac{9}{7} - \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{21} \right) - 3\frac{1}{2} \right] : |-7|; \text{ b) } \left\{ \left(\frac{3}{5} - 0,2 \right)^2 \cdot \left[\left(2\frac{3}{4} + 1\frac{1}{2} \cdot 3\frac{2}{3} \right) : 0,3 \right] - \frac{23}{5} \right\}^{-1} : (-2)^{-2};$$

$$\text{c) } \left[\left(-\frac{1}{3} \right)^2 + \left(-\frac{1}{3} \right)^3 + \left(-\frac{1}{3} \right)^4 \right] : \left(-\frac{1}{3} \right)^5; \text{ d) } \left[\left(-\frac{1}{5} \right)^2 \cdot 25^{-3} : \frac{1}{625} \right] : \left[\left(5^7 \right)^3 \cdot \left(\frac{1}{25} \right)^{10} \right]^{-2}.$$

4. Calculați:

$$\text{a) } \frac{3\frac{1}{4} - 1\frac{3}{20}}{5\frac{2}{5} + 2\frac{2}{20}} : \left(\frac{6,25 - 4,75}{1,5 + 5,25} \right)^{-1}; \text{ b) } \frac{3^4 - 2^5 - (-7)^2}{(-4)^2 + (-3)^3 - (-2)^4} + \left[\frac{(-4)^2 - (-1)^{-3}}{(-1)^2 + (-2)^3 + (-3)^4} \right]^{-2};$$

$$\text{c) } \frac{\left(-\frac{3}{7} \right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{7} \right)^4 \cdot \dots \cdot \left(-\frac{3}{7} \right)^{100}}{\left(-\frac{3}{7} \right)^1 \cdot \left(-\frac{3}{7} \right)^3 \cdot \dots \cdot \left(-\frac{3}{7} \right)^{99}} - \left(\left| -\frac{3}{7} \right|^2 \right)^{25}.$$



5. a) Arătați că: $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right), \forall n \in \mathbb{N}^*$;

b) Calculați partea întreagă a sumei: $S = \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{998 \cdot 1000}.$

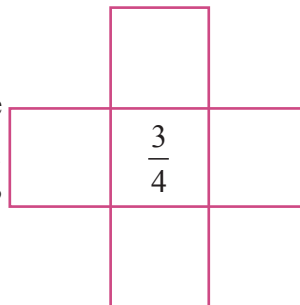
Subiectul al III-lea

1. Calculați: **a)** $a = (1 + 1000^{-1})(1 + 1001^{-1}) \dots (1 + 2013^{-1})$;
b) $b = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right)$. Arătați că $b \cdot n \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
-
-

2. **a)** Demonstrați inegalitatea: $\frac{1}{4} \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+2} \right) > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right), n \in \mathbb{N}, n \geq 3$;
b) Folosind inegalitatea de la punctu a), demonstrați că: $\frac{n+1}{n+2} > \frac{n-1}{n+1}$.

Subiectul al IV-lea

1. Completați căsuțele goale din diagrama alăturată, știind că pe verticală elementele se înjumătățesc, iar pe orizontală cresc cu $\frac{1}{2}$. Care este cel mai mic număr din diagramă? Dar cel mai mare? Calculați suma tuturor numerelor din diagramă.



2. Producția unei fabrici de încălțăminte este distribuită astfel: câte $\frac{1}{2}$ din producție în fiecare din cele 2 depozite regionale; primul depozit regional distribuie către 3 depozite locale în rapoartele $\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$; cel de-al doilea depozit regional distribuie către 2 depozite locale în rapoartele $\frac{3}{5}, \frac{2}{5}$; depozitul local care a primit $\frac{3}{5}$ din marfa de la depozitul regional distribuie la rândul său marfa primită către 2 magazine, în rapoartele $\frac{3}{4}, \frac{1}{4}$. Alcătuiți un „arbore” al întregii distribuții. A câta parte din marfă a primit fiecare din cele 2 magazine?
-
-



Tema 3

Ecuatii și inecuații în mulțimea numerelor raționale. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor

În această temă ne vom aminti despre:

- ✓ rezolvarea ecuațiilor și inecuațiilor de gradul I cu o necunoscută;
- ✓ rezolvarea unei probleme cu ajutorul ecuațiilor.



Forma generală a ecuației de gradul întâi cu o necunoscută și coeficienți raționali este: $ax + b = 0$,

unde $a \in \mathbb{Q}$ $b \in \mathbb{Q}$.

a și b se numesc **coeficienții** ecuației, iar x se numește **necunoscuta** ecuației. Necunoscuta x ia valori dintr-o mulțime precizată ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ etc.). O valoare a lui x din mulțimea precizată pentru care ecuația se transformă într-o egalitate adevărată se numește **soluție** a ecuației. A **rezolva** o ecuație înseamnă a-i determina mulțimea tuturor soluțiilor (din mulțimea precizată).

Rezolvarea unei probleme cu ajutorul ecuațiilor presupune parcurgerea următoarelor etape:

- ✓ identificarea datelor cunoscute și a celor necunoscute;
- ✓ notarea mărimii necunoscute (cu x, y, z etc.);
- ✓ punerea problemei în ecuație (adică scrierea unei relații care depinde de x , folosind datele problemei);
- ✓ rezolvarea ecuației;
- ✓ interpretarea soluției conform datelor problemei și formularea răspunsului.

Subiectul I

1. Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuațiile:

a) $x + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$; b) $\frac{9}{7} - 2x = \frac{4}{3}$; c) $-\frac{1}{5}x + 2 = -\frac{3}{5}$; d) $x : 2,3 = 4\frac{3}{5}$; e) $6(x+1) = -5\frac{1}{7}$;

f) $x : \left(-\frac{3}{4}\right) = 3,25$; g) $-\frac{5}{6}x + \frac{1}{2} = -7\frac{1}{3}$; h) $0,75x - 3,25 = 4,25$.

2. Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuațiile. Transformați fiecare ecuație din acest exercițiu în inecuație, înlocuind semnul „=”, pe rând, cu semnele „>”, respectiv „≤”. Rezolvați inecuațiile obținute.

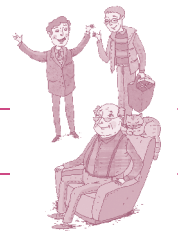
a) $\frac{x}{5} = 1\frac{3}{8}$; b) $\frac{3x+1}{4} = -\frac{2}{5}$; c) $\frac{7-2x}{3} + 3\frac{1}{2} = -\frac{5}{6}$; d) $\frac{x+1}{3} + \frac{2x-1}{2} = -8$; e) $|2x+3| = 2$;

f) $|4-3x| = 0$; g) $10 - |x+2| = -3$; h) $\left|5x - \frac{3}{7}\right| = 2,5$.

3. Determinați $x \in \mathbb{Q}$, astfel încât:

a) $\frac{6}{3x-2} \in \mathbb{Z}$; b) $-\frac{5}{2x-1} \in \mathbb{Z}$; c) $\frac{2x+7}{2x+3} \in \mathbb{Z}$.

4. După ce a cheltuit $\frac{3}{5}$ din banii primiți de la bunicul și încă 24 lei, Andrei a rămas cu 40 lei. Câți lei a primit de la bunicul ?



5. Dacă înmulțim un număr cu $\frac{8}{3}$ obținem același rezultat ca atunci când la dublul numărului adăugăm $\frac{5}{6}$. Care este numărul ?

6. Aflați un număr știind că adunând la șapte treimi din el o treime din sfertul său și apoi scăzând o doisprezecime din triplul său obținem numărul 13.

7. Măsurile unghiurilor ascuțite ale unui triunghi dreptunghic sunt direct proporționale cu 7 și 8. Determinați măsurile acestor unghiuri.

8. Pentru o excursie tematică s-au înscris 54 de elevi. Numărul băieților reprezintă $\frac{4}{5}$ din numărul fetelor. Aflați câte fete și câți băieți merg în excursie.

Subiectul al II-lea

1. Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuațiile:

a) $2\left(5x - \frac{2}{3}\right) + 4 = -\frac{1}{3}$; b) $x + \frac{2x-1}{4} = \frac{3}{2} - \frac{x}{4}$; c) $\frac{5(x-2)}{6} - \frac{2(1-x)}{15} = \frac{1}{3} + \frac{4-3x}{30}$;
d) $3(2-4x) - \frac{x+2}{4} + \frac{x}{6} = \frac{2(1-3x)}{8}$; e) $\frac{7x-2}{4} = \frac{3x+4}{3}$; f) $\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3^2}x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\right] = 1$.

2. Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuațiile:

a) $\frac{|2x+1|}{3} - \frac{3|2x+1|}{5} + 3\frac{2}{3} = 0$; b) $|x-0,3| + \left|2x - \frac{3}{5}\right| = 0$; c) $\left|3x - 1\frac{2}{7}\right| \cdot \left(\left|3x - \frac{7}{3}\right| + \frac{2}{5}\right) = 0$;
d) $(4-5x)^2 + (3-4x)^2 = 0$; e) $\frac{3x-2}{5x+6} = \frac{2}{7}, x \neq -\frac{6}{5}$; f) $\left|2x + \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{8}{5} - 3x\right|$.

3. Un călător și-a propus să parcurgă un drum în 3 zile, astfel: în prima zi $\frac{1}{6}$ din drum plus încă 15 km, a doua zi $\frac{1}{5}$ din rest plus încă 17 km, iar a treia zi $\frac{1}{3}$ din tot drumul plus încă 3 km.
- a) Care este lungimea întregului drum?
b) Cât a parcurs călătorul în fiecare zi?



4. Prețul unui televizor a fost redus mai întâi cu 15%. După o săptămână a intervenit o nouă reducere cu 20%. Un cumpărător care a monitorizat evoluția prețului televizorului hotărăște să-l cumpere după cele 2 reduceri, plătind 2 550 lei. Cu banii economisiți față de prețul inițial își cumpără și un frigider.
- a) Cât a costat inițial televizorul?
b) Cât a costat frigiderul?
-
-

5. Prețul unui autoturism (în euro) este achitat de un cumpărător în 4 rate. Prima rată reprezintă $\frac{1}{3}$ din preț, a doua rată $\frac{1}{3}$ din rest, a treia rată $\frac{1}{3}$ din noul rest, iar a patra rată este de 3 200 euro. Cât a costat autoturismul?
-

Subiectul al III-lea

1. Să se rezolve ecuația: $\frac{x+3}{3} + \frac{x+7}{5} + \frac{x+11}{7} + \frac{x+19}{11} + \frac{x+23}{13} = 10$

(OM, etapa locală, Buzău, 2010)



2. Să se determine mulțimea: $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{13} \right\}$.

(OM, etapa locală, Mehedinți, 2010)

Subiectul al IV-lea

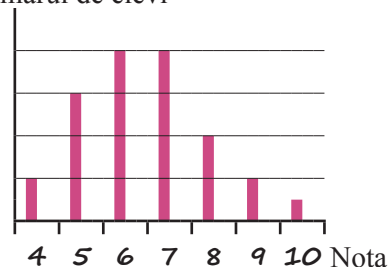
1. 62 de elevi din clasele a VII-a A și a VII-a B au participat la o testare la matematică.

Rezultatele sunt surprinse în diagrama alăturată.

a) Câți elevi au luat nota 10?

b) A câta parte din elevi a promovat testul?

Numărul de elevi



2. În urma aplicării unui test, profesoara de matematică face următoarea analiză: $\frac{2}{5}$ din elevi au rezolvat corect și complet problema de geometrie; dintre ceilalți $\frac{2}{3}$ au desenat corect figura. Câți elevi au participat la test, dacă numărul elevilor care au desenat incorect figura este 5? Câți elevi au luat nota 10, dacă ei reprezintă $\frac{1}{2}$ din numărul celor care au rezolvat complet problema de geometrie?
-
-

CUPRINS

<i>Cuvânt-înainte</i>	3
Tema 1 – Numere raționale: număr opus, modul, compararea numerelor raționale	4
Tema 2 – Operații cu numere raționale	9
Tema 3 – Ecuații și inecuații în mulțimea numerelor raționale. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor	15
Tema 4 – Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect. Algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate dintr-un număr natural. Aproximări	19
Tema 5 – Mulțimea numerelor reale. Opusul și modulul unui număr real. Compararea și ordonarea numerelor reale	23
Tema 6 – Operații cu numere reale. Media geometrică a două numere reale pozitive	27
Tema 7 – Calcul cu numere reale reprezentate prin litere	32
Tema 8 – Formule de calcul prescurtat. Descompuneri în factori utilizând reguli de calcul în $\mathbb{R}$. Ecuații de forma $x^2 = a$, unde $a \in \mathbb{Q}_+$	36
Tema 9 – Proprietăți ale relației de inegalitate „ $\leq$ ” pe mulțimea numerelor reale. Inecuații de forma $ax + b > 0$ ($<$, $\leq$, $\geq$), $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$	40
Tema 10 – Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex. Paralelogram – proprietăți	43
Tema 11 – Aria unui triunghi	46
Tema 12 – Teorema lui Thales. Teorema reciprocă a teoremei lui Thales	50
Tema 13 – Triunghiuri asemenea. Teorema fundamentală a asemănării	53
Tema 14 – Criterii de asemănare a triunghiurilor	56
Tema 15 – Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic: sinusul, cosinusul, tangenta, cotangenta unui unghi ascuțit. Rezolvarea triunghiului dreptunghic	59
Tema 16 – Arii	63
Tema 17 – Cercul: definiție, elemente în cerc, unghi la centru. Unghi înscris în cerc. Lungimea cercului și aria discului	67
Tema 18 – Măsura arcelor; arce congruente. Teoreme referitoare la coarde și arce. Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc. Tangentele dintr-un punct existent la un cerc	70
Tema 19 – Poligoane regulate. Calculul elementelor (latura, apotema, aria, perimetrul) în următoarele poligoane regulate: triunghi echilateral, pătrat, hexagon regulat	74
Tema 20 – Probabilitatea realizării unui eveniment	78
Tema 21 – Trapezul: clasificare, trapezul isoscel. Proprietăți	80
Tema 22 – Reprezentarea și interpretarea unor dependențe funcționale prin tabele, diagrame și grafice	83
Tema 23 – Dreptunghiul. Proprietăți	86
Tema 24 – Reguli de calcul cu radicali. Scoaterea factorilor de sub radical, introducerea factorilor sub radical. Raționalizări de tipul $a\sqrt{b}$	88
<i>Indicații și răspunsuri</i>	92